

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Φεβρουάριος 1, 2016

1. Εξετάστε σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & , \quad x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια, τη μερική διαφορισιμότητα, τη διαφορισιμότητα και τη συνεχή διαφορισιμότητά της και δώστε όπου υπάρχουν τη παράγωγο και τη παράγωγο ως προς κάθε κατεύθυνση.

2. Δίδεται το υποσύνολο του \mathbb{R}^2

$$C = \{e^{-t}(\cos t, \sin t) \text{ με } t \geq 0\}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} -(x^2 + y^2)^{-1} & , \quad (x, y) \in C \\ 0 & , \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α') Βρείτε τη κλειστή θήκη $\bar{C} \subset \mathbb{R}^2$ του C και δείξτε ότι είναι συμπαγής.

(β') Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f και χαρακτηρίστε τα.

3. Αν \mathcal{L} το σύνολο στάθμης $c = 4$ της συνάρτησης $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ τότε να δείξετε ότι η κλίση της g στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $(g \circ \bar{f})'(0)$ όπου $\bar{f} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη με $\bar{f}([-1, 1]) \subset \mathcal{L}$ και $\bar{f}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.
4. Δίδονται $n \in \mathbb{N}$ τυχαία αλλά σταθερά σημεία $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbb{R}^n$. Βρείτε σε ποιο σημείο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ελαχιστοποιείται η συνάρτηση:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \|\bar{x} - \bar{x}_i\|^2, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

5. Η επίδραση $E(x, t)$ που έχουν x μονάδες ενός φαρμάκου t ώρες μετά τη λήψη του δίδεται προσεγγιστικά από τον τύπο

$$E(x, t) = x^2(a - x)t^2e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t$$

Βρείτε τη δόση x και το χρόνο t για τα οποία το φάρμακο έχει τη μέγιστη επίδραση.

6. Δίδεται η συνάρτηση $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$. Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα και χαρακτηρίστε τα.
7. Έστω $W \subset U \subset \mathbb{R}^n$ και $V \subset \mathbb{R}^m$ όλα ανοιχτά και $\bar{g} : W \rightarrow V$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\bar{f}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))$, $\bar{x} \in W$ είναι διαφορίσιμη και βρείτε τη παράγωγό της.